1. domaća zadaća

1. Dokažite da je $\left(\frac{a,b}{F}\right) = \left(\frac{ax^2, by^2}{F}\right)$.

pomoću matrica

2. Neka su $a,b \in F^*$. Po analogiji s Primjerom 1 konstruirajte $\left(\frac{a,b}{F}\right)$.

3.* Možete li "objasniti" konstrukciju elementa y iz dokaza Teorema 6?
[Ako je x izotropan, dokažite da je i $\sum_{k=1}^{m} a_k x^k$ izotropan za sve $a_k \in F$.]

4. Dokažite da je reducirana norma multiplikativna funkcija?
(hint: za elegantan dokaz možete iskoristiti 2. zadatak)

5. Neka je $\{1, i, j, k\}$ standardna baza za $\left(\frac{2,3}{\mathbb{Q}}\right)$. Izračunajte minimalni polinom od elementa $\alpha = i+j$. Dokažite da je minimalni polinom svakog elementa kvaternionske algebre B stupnja 1 ili 2. (trag/norma)

6. Hamiltonovi kvaternioni $H = \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right)$ se koriste u klasičnoj geometriji.

Za $v, w \in H_0$ dokažite da je $vw = -v \cdot w + v \times w$.

množenje kvaterniona.

skalarni produkt

vektorski produkt

ako je

$v = v_1 i + v_2 j + v_3 k$

$w = w_1 i + w_2 j + w_3 k$

onda

$v \times w = \begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ $\quad v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$

7. Neka je $B = \left(\frac{a,b}{F}\right)$ kvaternionska algebra sa standardnom bazom $\{1, i, j, k\}$.

a) Pokažite da ako je i' ortogonalan u odnosu na $\{1, j\}$ da je onda $(i')^2 \in F^*$ te da je $\{1, i, j', ij'\}$ standardna baza za B.

(Tj. $B \simeq \left(\frac{a', b}{F}\right)$),

(b)* Neka je $B' = \left(\frac{a', b'}{F}\right)$ i pretp. da je $B \simeq B'$. Pokažite da

postoji $c \in F^*$ t.d.

$$B \simeq \left(\frac{a, b}{F}\right) \simeq \left(\frac{c, b}{F}\right) \simeq \left(\frac{c, b'}{F}\right) \simeq \left(\frac{a', b'}{F}\right).$$

8. Dokažite (koristeći kvaternionske algebre) da jednadžba

$$x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 4w^2 = 5$$ ima ∞ mnogo

cjelobrojnih rješenja.

9. a) Dokažite da je standardna baza $\{1, i, j, k\}$ za $\left(\frac{a, b}{F}\right)$ ortogonalna.

b) Kada je $\left(\frac{a, b}{F}\right)$ nedegenerirana?

ne postoji vektor koji je okomit na sve vektore iz algebre.